



ORIGINAL RESEARCH PAPER

Estimation of the parameters of Weibull distribution and net premium in the presence of outliers

E. Sohrabi, M. Jabbari Nooghabi*

Department of Statistics, Faculty of Mathematics of Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

ARTICLE INFO

Article History:

Received 26 August 2023

Revised 01 November 2023

Accepted 15 November 2023

Keywords:

Estimation

Net premium

Outliers

Weibull distribution

ABSTRACT

BACKGROUND AND OBJECTIVES: Weibull distribution, which was introduced by a Swedish physicist named Weibull, is today the most common model used in studies of reliability, longevity, quality control and widely in various branches of science, including Insurance, medicine and engineering are used. This distribution has a lot of flexibility for modeling different data. The main goal of this research is to calculate insurance premiums and estimate Weibull distribution parameters using different estimation methods.

METHODS: In this article, the parameters of the Weibull distribution and the net premium are estimated using moment estimation, maximum likelihood, least squares of error, weighted least squares, percentage, Cramer-Von- Mises, Mixture of moment and maximum-likelihood are discussed in the presence of outliers. R software was used for simulation and numerical calculations and Easyfit software was used to fit the Weibull distribution to the real example data. At the end, real data examples for obtaining different estimators of the premium in the case of unknown parameters β and θ and known α is provided.

FINDINGS: In this research bias, the mean square error of net premium and unknown parameters β and θ were obtained by using different estimators for Weibull distribution data as well as the generalized variance of unknown parameters β and θ .

CONCLUSION: In this part, the evaluation and comparison of the estimators using real and simulated data was discussed, which was obtained by different k_{max} for real data. For example, in the moment method, k_{max} was equal to 5, based on which the net premium is 3.37657. In the simulated data, according to k (number of outliers), n (sample size) and β and θ values, bias values, mean squared error and generalized variance of premium and different estimators were obtained. As an example, for $n=10$, $k=1$, $\beta=1.5$, $\theta=3$ and $\alpha=70$, by comparing the bias and generalized variance of the estimators, we come to the conclusion that based on the bias, the percentile estimator has a better performance than the other estimators. That is, it has less bias and according to the generalized variance, the maximum likelihood estimator has a better performance than other estimators and the estimators are consistent (the generalized variance decreases with the increase of the sample size). Based on the mean square error, the moment estimation has a better performance than other estimators.

*Corresponding Author:

Email: jabbarim@um.ac.ir

Phone: +9851 38805694

ORCID: [0000-0002-5636-2209](http://orcid.org/0000-0002-5636-2209)

DOI: [10.22056/ijir.2024.01.04](https://doi.org/10.22056/ijir.2024.01.04)

This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).





نشریه علمی پژوهشنامه بیمه

سایت نشریه: <https://ijr.irc.ac.ir/?lang=fa>



مقاله علمی

برآورد پارامترهای توزیع وایبول و حقبیمه خالص در مواجهه داده‌های دورافتاده

ابراهیم سهرابی، مهدی جباری نوقابی*

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

چکیده:

پیشینه و اهداف: توزیع وایبول که فیزیکدانی سوئدی به نام وایبول معرفی کرد، امروزه رایج‌ترین مدل مورد استفاده در مطالعات قابلیت اطمینان، طول عمر، کنترل کیفیت و به طور وسیعی در شاخه‌های مختلف علوم از جمله بیمه، پژوهشی و مهندسی استفاده می‌شود. این توزیع برای الگوسازی داده‌های مختلف، انعطاف‌پذیری زیادی دارد. هدف اصلی این پژوهش محاسبه حقبیمه و برآورد پارامترهای توزیع وایبول با استفاده از روش‌های مختلف برآورد است.

روش‌شناسی: در این مقاله به برآورد پارامترهای توزیع وایبول و حقبیمه خالص با استفاده از برآوردهای گشتاوری، ماکسیمم درست‌نمایی، کمترین توان‌های دوم خطأ، کمترین توان‌های دوم وزنی، صدکی، کرامر-فون-میسر، آمیخته گشتاوری و ماکسیمم درست‌نمایی در حضور داده‌های پرت پرداخته شده است. از نرم‌افزار R برای شبیه‌سازی و محاسبات عددی و از نرم‌افزار Easyfit برای برآش توزیع وایبول به داده‌های مثال واقعی استفاده شد. در پایان دو مثال واقعی برای بدست آوردن برآوردهای متفاوت از حقبیمه در صورتی که دو پارامتر β و θ مجهول و معلوم است، ارائه شده است.

یافته‌ها: در این پژوهش اریبی، میانگین توان دوم خطأ، واریانس تعمیم یافته و حقبیمه خالص برای پارامترهای مجهول β و θ با استفاده از برآوردهای مختلف، برای داده‌های توزیع وایبول به دست آمد.

نتیجه‌گیری: در این قسمت به بررسی و مقایسه برآوردهای با استفاده از داده‌های واقعی و شبیه‌سازی شده پرداخته شد که برای داده‌های واقعی در روش‌های مختلف k-max متفاوت به دست آمد. برای نمونه، در روش گشتاوری k-max برابر ۵ شد که براساس آن حقبیمه خالص ۳,۳۷۶۵۷ است. در داده‌های شبیه‌سازی شده نیز با توجه به k تعداد داده‌های دورافتاده، n (حجم نمونه) و مقادیر β و θ ، مقادیر اریبی، میانگین توان دوم خطأ و واریانس تعمیم یافته حقبیمه و برآوردهای مختلف به دست آمد که برای نمونه برای $n=10$, $\alpha=0.05$, $\beta=1.5$, $k=1$, $\theta=20$ با مقایسه اریبی و واریانس تعمیم یافته برآوردهای به این نتیجه می‌رسیم که براساس اریبی، برآوردهای دارای عملکرد بهتری نسبت به دیگر برآوردهای است، یعنی دارای اریبی کمتری است و با توجه به واریانس تعمیم یافته، برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی دارای عملکرد بهتری نسبت به سایر برآوردهای است و برآوردهای سازگارند (با افزایش حجم نمونه واریانس تعمیم یافته کاهش می‌یابد). براساس میانگین توان دوم خطأ، برآوردهای گشتاوری دارای عملکرد بهتری نسبت به سایر برآوردهای است.

اطلاعات مقاله:

تاریخ های مقاله:
تاریخ دریافت: ۰۴ شهریور ۱۴۰۲
تاریخ داوری: ۱۰ آبان ۱۴۰۲
تاریخ پذیرش: ۲۴ آبان ۱۴۰۲

کلمات کلیدی:
برآورد
توزیع وایبول
حقبیمه خالص
داده‌های دورافتاده

نویسنده مسئول:

ایمیل: jabbarinm@um.ac.ir
تلفن: +۹۸۵۱ ۳۸۸۰۵۶۹۴

ORCID: 0000-0002-5636-2209

DOI: [10.22056/ijr.2024.01.04](https://doi.org/10.22056/ijr.2024.01.04)

توجه: مدت زمان بحث و انتقاد برای این مقاله تا ۱ آوریل ۲۰۲۴ در وب‌سایت IJR در «نمايش مقاله» باز است.

مقدمه

جدید برای برآورد پارامترهای مدل گاما در حضور داده‌های دورافتاده اتخاذ کرد. Dixit and Jabbari Nooghabi (2011) در مقاله‌ای تحت عنوان «برآورد پارامترهای توزیع پارتول در حضور داده‌های دورافتاده»، به برآورد پارامترهای توزیع پارتول پرداختند.

دانشمندان زیادی در مواجهه با مسائل مختلف، تعاریفی از داده‌های دورافتاده را ارائه کرده‌اند. در یک نمونه ممکن است، تعدادی از مشاهدات با یقینه همانگ نباشند که این فکر را ایجاد کند که روش نمونه‌گیری اشتباه است یا مشاهدات از جامعه دیگری باشند این مقادیر داده‌های دورافتاده هستند (Kendal and Buckland, 1957).

Anscombe (1960) یک مشاهده با باقی‌مانده بزرگ و غیرطبیعی یک مشاهده دورافتاده را تلقی می‌کند. Hawkins (1980) معتقد بود، مشاهداتی که آن قدر از بقیه داده‌ها انحراف داشته باشد، به طوری که این ایده را در ذهن بیاورد که با روش و سازوکار دیگری تولید شده است، داده دورافتاده است. در این مقاله با توجه به ضرورت به برآورد پارامترها در صورتی که توزیع k و نیز $n-k$ مشاهده هر دو واپسی باشند به برآورد پارامترهای توزیع واپسی و قتی که هر دو پارامتر β و θ مجهول و α معلوم باشد، پرداخته شده است.

در این پژوهش هدف اصلی برآورد حق‌بیمۀ خالص است و چون برای برآورد آن لازم است که پارامترهای توزیع واپسی در مواجهه با داده‌های دورافتاده مشخص باشد و در اینجا مجهول است، لازم است که ابتدا پارامترهای مجهول و سپس حق‌بیمۀ خالص برآورد شود.

یکی از وجود تمایز این مقاله با مقالات دیگر، آن است که در اغلب موارد توزیع داده‌های دورافتاده و غیردورافتاده یکسان نیست، از طرف دیگر اگر داده دورافتاده در داده‌ها وجود داشته باشد منطقی است که یکی از پارامترهای توزیع متفاوت باشد که در این پژوهش از این رویکرد استفاده شده است، هرچند که از نظر مبانی نظری مدل‌سازی و برآورد پارامترها در این حالت پیچیده‌تر است.

ادامه مقاله به صورت ذیل است: در بخش دوم روش پژوهش، توزیع واپسی، داده دورافتاده و معرفی مدل دیکشیت برای مدل‌سازی داده‌های دورافتاده پرداخته شده است. در بخش سوم به بررسی تابع چگالی در حضور داده‌های پرت، در بخش چهارم به بررسی برآوردگرهای گشتاوری (Moment Method)، ماسکیم درستنمایی (Maximum Likelihood)، کمترین توان‌های دوم خطأ (Least Squares Error)، Weighted Least Squares Error)، Cramer- (Percentile)، برآوردگر کرامر-فون-میسر (von-Mises)، Anderson-Darling (Anderson-Darling)، اندرسن-دارلینگ (Anderson-Darling)، گشتاوری و ماسکیم درستنمایی در برآورد پارامترهای مجهول پرداخته شده است، در بخش پنجم حق‌بیمۀ خالص را به دست می‌آوریم. در بخش ششم، برآورد حق‌بیمۀ با استفاده از روش‌های مختلف به دست آمده و به مقایسه برآوردگرهای مختلف حق‌بیمۀ پرداخته شده است. در بخش هفتم دو مثال واقعی برای محاسبه حق‌بیمۀ ارائه و در بخش هشتم به نتیجه‌گیری و تحلیل یافته‌ها پرداخته شده است.

یکی از مهم‌ترین موضوعات در علوم بیمه، حق‌بیمۀ است. حق‌بیمۀ P ، مقدار پولی است که بیمه‌گر به‌منظور پوشاندن زیان‌های مورد انتظار از بیمه‌گذار دریافت می‌کند. Young (2006) روش‌هایی متفاوت برای تعیین حق‌بیمۀ پیشنهاد داده است. فرض کنید که X مقدار ادعاهای خسارت که در گذشته رخ داده است، آنگاه حق‌بیمۀ خالص از فرمول $E(X) = p$ به دست می‌آید. توزیع واپسی به طور فراوان در آزمایش طول عمر، تجزیه و تحلیل بقا استفاده شده است. Weibull (1951) از این توزیع برای به دست آوردن نرخ خرابی لوله خلاً استفاده کرد، Lieblein and Zelen (1956) از این توزیع برای بررسی نرخ خرابی بلبرینگ استفاده کردند. Singh et al. (2013) به تجزیه و تحلیل مدل سیستم موازی با اشتراک بار k مؤلفه پرداختند با فرض اینکه توزیع زمان شکست از مؤلفه‌ها به صورت واپسی باشد. Chaturvedi et al. (2014) به تحلیل بیزی استوار از مدل شکست واپسی تحت مدل شکست بیزی از کلاس سیگماهای آلووده شده از پیشین‌ها برای پارامترها پرداختند. Fang et al. (2016) در مقاله‌ای تحت عنوان «طول عمر سیستم‌های سری با ترتیب نامنظم (پراکنده)» از مدل واپسی با داده‌های دورافتاده چندگانه پرداختند. در سال Gupta and Singh (2017) در مقاله‌ای به برآورد کلاسیک و بیزی از توزیع واپسی در حضور داده‌های دورافتاده پرداختند که در آن داده‌های دورافتاده از توزیع نمایی تبعیت می‌کنند. Strzelecki (2021) یک نسخه سه‌پارامتری بهروزشده از توزیع واپسی برای تعیین طول عمر برای سطوح مختلف استرس معرفی کرد. Sindhu and Atangana (2021) توزیع واپسی نمایی معکوس برای تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان به کار بردن. Abubakar and Muhammad Sabri (2021) یک شکل تعديل شده از مدل واپسی را برای تجزیه و تحلیل بازده سرمایه‌گذاری در نظر گرفتند. Liu et al. (2021) از نسخه جدیدی از توزیع واپسی Alyami et al. (2022) برای تحلیل پدیده کووید-۱۹ استفاده کردند. از یک توزیع واپسی اصلاح شده برای تحلیل پژوهشی و مهندسی مجموعه داده‌ها استفاده کردند. در آزمایش‌های مربوط به طول عمر گاهی، یک آزمایشگر با موقعیتی مواجه می‌شود که برخی مشاهدات در یک نمونه در مقایسه با مجموعه مشاهدات باقی‌مانده بسیار کوچک یا خیلی بزرگ‌اند. به عبارت دیگر، در طول یک آزمایش، با شرایطی مواجه می‌شویم که ممکن است یک یا چند مشاهدات باقی‌مانده مشاهدات هم‌همگن نباشند و از این‌رو می‌توان آن‌ها را به عنوان داده دورافتاده در نظر گرفت (Barnett and Lewis, 1984). تشخیص نقاط دورافتاده هم می‌تواند مهم باشد، زیرا با تشخیص مشاهدات دورافتاده، فرد می‌تواند از آلوودگی تخمین‌های بعدی جلوگیری کند. Kale and Sinha (1971) برآورد طول عمر مورد انتظار را در حضور داده‌های دورافتاده، در زمینه آزمایش‌های طول عمر با در نظر گرفتن توزیع نمایی، به عنوان یک مدل طول عمر در نظر گرفتند. Pettit (1988) رویکرد بیزی را برای مدل‌سازی داده دورافتاده اتخاذ کرد و از آن در رابطه با اعضای خانواده نمایی استفاده کرد. Dixit (1989) یک روش

روش‌شناسی پژوهش

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i) \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} \prod_{j=1}^k \frac{g(x_{i_j})}{f(x_{i_j})} [C(n, k)]^{-1}, \quad (3)$$

که در آن:

$$\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} = \sum_{i_1=1}^{n-k+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{n-k+2} \dots \sum_{i_k=i_{k-1}+1}^n. \quad (4)$$

همچنین برای تک مشاهده X ،تابع چگالی و توزیع متغیر تصادفی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$h(x) = bg(x) + \bar{b}f(x), \quad (5)$$

و

$$H(x) = bG(x) + \bar{b}F(x). \quad (6)$$

که در آن $b = \frac{k}{n}$ و $\bar{b} = 1 - b$. شایان ذکر است که در مدل دیکشیت، متغیرهای تصادفی (X_1, X_2, \dots, X_n) مستقل نیستند.

تابع چگالی توأم (X_1, X_2, \dots, X_n) در حضور داده‌های دورافتاده فرض کنید، متغیرهای تصادفی (X_1, X_2, \dots, X_n) به صورتی باشند که هر k تا از آن‌ها مستقل و هم توزیع واپسی با پارامترهای α ، β و θ به صورت معادله (7) باشند.

$$g(x; \alpha, \beta, \theta) = \alpha(\beta\theta)^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(\beta\theta x)^{\alpha}}, \quad (7)$$

$x > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \theta > 0,$

و $n-k$ تای باقی‌مانده نیز مستقل و هم توزیع واپسی و از معادله (1) تبعیت می‌کند، آنگاه تابع چگالی توأم (X_1, X_2, \dots, X_n) در حضور داده‌های دورافتاده بر اساس معادله (3) به صورت معادله (8) خواهد بود.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha, \beta, \theta) = \frac{\alpha^n \theta^{n\alpha} e^{-\theta^{\alpha} \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha}} \beta^{k\alpha}}{C(n, k)} \prod_{i=1}^n (x_i)^{\alpha-1} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} \prod_{j=1}^k e^{-(\theta^{\alpha})(\beta^{\alpha}-1)(x_{i_j})^{\alpha}}, \quad (8)$$

و تابع چگالی حاشیه‌ای x_i بر اساس معادله (5) به صورت معادله (9) خواهد بود.

$$f(x_i; \alpha, \beta, \theta) = b\alpha(\beta\theta)^{\alpha} x_i^{\alpha-1} e^{-(\beta\theta x_i)^{\alpha}} + \bar{b}\alpha(\theta)^{\alpha} x_i^{\alpha-1} e^{-(\theta x_i)^{\alpha}} = \alpha\theta^{\alpha} x_i^{\alpha-1} \left(b\beta^{\alpha} e^{-(\theta x_i)^{\alpha}} + \bar{b}e^{-(\theta x_i)^{\alpha}} \right), \quad (9)$$

از آن جا که توزیع واپسی کاربرد فراوانی در مدل سازی داده‌های چوله به راست به خصوص متغیرهای اقتصادی دارد و نیز در مدل سازی میزان و ادعای خسارت در بیمه به کاربرده می‌شود و از طرفی، در مواجهه با داده‌های دور افتاده مورد توجه محققین قرار نگرفته است، بنابراین در این پژوهش توزیع واپسی در مواجهه با داده‌های دور افتاده انتخاب شده است. لذا ابتدا پارامترهای توزیع واپسی را با توجه به روش‌های مختلف برآورد می‌کنیم و کارایی آن‌ها مقایسه می‌شود. سپس حقیقیت خالص براساس روش‌های گشتاوری، ماکسیمم درست‌نمایی، کمترین توان‌های دوم خطأ، کمترین توان‌های دوم خطای وزنی، صدکی، کرامر-فون-میسر، اندرسن دارلینگ و آمیخته گشتاوری و ماکسیمم درست‌نمایی برآورد می‌کنیم. در انتها با استفاده از دو مثال کاربردی نتایج عملی آن را گزارش می‌کنیم.

توزیع واپسی

توزیع واپسی که بهوسیله یک فیزیکدان سوئی به نام Weibull (1951) معرفی شد، امروزه متداول‌ترین مدل مورد استفاده در مطالعات قابلیت اطمینان، طول عمر، کنترل کیفیت است و به طور وسیعی در شاخه‌های مختلف علوم، از جمله بیمه، پژوهشی و مهندسی استفاده می‌شود. این توزیع برای الگوسازی داده‌های مختلف، دارای انعطاف‌پذیری زیادی است. فرض کنید متغیرهای تصادفی (X_1, X_2, \dots, X_n) دارای توزیع واپسی باشند، تابع چگالی و توزیع آن به ترتیب به صورت معادلات (1) و (2) نوشته می‌شود.

$$f(x) = \alpha\theta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(\theta x)^{\alpha}}, \quad x > 0, \theta > 0, \alpha > 0, \quad (1)$$

و

$$F(x) = 1 - e^{-(\theta x)^{\alpha}}, \quad x > 0, \alpha > 0, \theta > 0. \quad (2)$$

داده دورافتاده

داده دورافتاده، مشاهده‌ای است که به طور غیرعادی یا اتفاقی از وضعیت عمومی داده‌های تحت آزمایش و نسبت به قاعده‌ای که براساس آن آنالیز می‌شود، انحراف داشته باشد.

برای مدل سازی داده‌های دورافتاده می‌توان از مدل‌های مختلفی استفاده کرد. حال اگر بخواهیم به طور کلی مدلی بیان کنیم، تا براساس آن توزیع و چگالی یک متغیر تصادفی در مواجهه با داده دورافتاده را به دست آورد، می‌توانیم از مدل زیر که به مدل Dixit (1987) معروف است، استفاده کنیم.

مدل دیکشیت

فرض کنید $(i \geq 1)$ X_i یک سری از متغیرهای تصادفی نامنفی باشد. آنگاه تابع چگالی توأم (X_1, X_2, \dots, X_n) به صورت زیر خواهد بود:

بنابراین برآورد گشتاوری پارامتر θ به صورت معادله (۱۵) است.

$$\hat{\theta}_{mm} = \frac{-A_2 + \sqrt{\Delta}}{2A_1}, \quad (15)$$

و در نهایت با توجه به معادله (۱۴) و جایگذاری $\hat{\theta}_{mm}$ در آن، برآورد گشتاوری پارامتر β به صورت معادله (۱۶) نوشته می‌شود.

$$\hat{B}_{mm} = \frac{b\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\bar{x}\hat{\theta}_{mm} - \bar{b}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}, \quad (16)$$

که در آن باید $\bar{x}\hat{\theta}_{mm} > \bar{b}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$ باشد. با توجه به معلوم بودن n و k در مدل دیکشیت و با توجه به روش‌های عددی و شبیه‌سازی برای نمونه‌های مختلف، مقدار $\hat{\beta}_{mm}$ به دست می‌آید.

برآوردگر ماکسیمم درستنمایی
فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی با حجم n از تابع چگالی وایبول در حضور داده‌های دورافتاده باشند و فرض کنیم:

$$L = L(\beta, \theta | (x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha)) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha, \beta, \theta), \quad (17)$$

بنابراین، با توجه به معادله (۸) و گرفتن لگاریتم طبیعی از طرفین آن داریم:

$$\ln(L) = n \ln(\alpha) + n\alpha \ln(\theta) + (\alpha-1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \theta^\alpha \sum_{i=1}^n (x_i)^\alpha + \alpha k \ln(\beta) + \ln \left(\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} Z \right), \quad (18)$$

که در آن، Z به صورت معادله (۱۹) است.

$$Z = \prod_{j=1}^k e^{-\theta^\alpha(\beta^\alpha-1)(x_{ij})^\alpha} = e^{-\theta^\alpha(\beta^\alpha-1)\sum_{j=1}^k (x_{ij})^\alpha}, \quad (19)$$

لذا، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی β به صورت معادله (۲۰) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \beta} = \frac{K\alpha}{\beta} + \frac{\left(\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} Z \right)'}{\left(\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} Z \right)} = 0, \quad (20)$$

که در آن

روش‌های برآورد در این قسمت با استفاده از روش‌های مختلف، به برآورد پارامترهای α , β و θ می‌پردازیم که در آن α معلوم و β و θ مجھول است.

روش گشتاوری

فرض کنید (X_1, X_2, \dots, X_n) متغیرهای تصادفی با حجم n از تابع چگالی وایبول در حضور داده‌های دورافتاده باشند، داریم:

$$E(X) = b \frac{1}{\beta\theta} \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) + \bar{b} \frac{1}{\theta} \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right), \quad (10)$$

۹

$$E(X)^2 = b \frac{1}{(\beta\theta)^2} \Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) + \bar{b} \frac{1}{\theta^2} \Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right). \quad (11)$$

برای به دست آوردن برآورد گشتاوری دو پارامتر مجھول β و θ لازم است که گشتاورهای جامعه را با گشتاورهای متناظر در نمونه برابر قرار دهیم، لذا:

$$E(X) = b \frac{1}{\beta\theta} \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) + \bar{b} \frac{1}{\theta} \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) = \bar{x}, \quad (12)$$

$$E(X)^2 = b \frac{1}{(\beta\theta)^2} \Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) + \bar{b} \frac{1}{\theta^2} \Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) = \bar{x}^2. \quad (13)$$

بنابراین با توجه به معادله (۱۲) با محاسبه β داریم:

$$\beta = \frac{b \frac{1}{\theta} \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\bar{x} - \bar{b} \frac{1}{\theta} \Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}, \quad (14)$$

و همچنین با توجه به معادله (۱۳) و به توان ۲ رساندن معادله (۱۴) و برابر قرار دادن این دو معادله و بعد از محاسبات جبری نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} & \left(\bar{x}^2 b \Gamma^2 \left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma \left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - (\bar{x})^2 b \Gamma \left(1+\frac{2}{\alpha}\right) \right) \theta^2 + \\ & \left(2\bar{x} \bar{b} b \Gamma \left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma \left(1+\frac{2}{\alpha}\right) \right) \\ & \theta - b (\bar{b})^2 \Gamma^2 \left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma \left(1+\frac{2}{\alpha}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$A_1 \theta^2 + A_2 \theta + A_3 = 0, \quad \Delta = (A_2)^2 - 4A_1 A_3$$

مشاهدات توزیع $G(x)$ و $(n-k)$ تای باقیمانده از توزیع $H(x)$ پیروی کند، براساس مدل دیکشیت تابع توزیع حاشیه‌ای آن است.

$$H(x) = bG(x) + \bar{b}F(x) = b\left(1 - e^{-(\theta\beta x)^a}\right) + \bar{b}\left(1 - e^{-(\theta x)^a}\right) = 1 - be^{-(\theta\beta x)^a} - \bar{b}e^{-(\theta x)^a}. \quad (27)$$

بنابراین، مینیمم کردن معادله (۲۸)، برآورد کمترین توان‌های دوم خطای β و θ را می‌دهد.

$$Z = \sum_{j=1}^n \left(H(X_{(j)}; \alpha, \beta, \theta) - \frac{j}{n+1} \right)^2 = \sum_{j=1}^n \left(-be^{-(\theta x_{(j)})^a} - \bar{b}e^{-(\theta x_{(j)})^a} + 1 - \frac{j}{n+1} \right)^2. \quad (28)$$

لذا، برآورد کمترین توان‌های دوم خطای θ بهصورت (۲۹) بهدست می‌آید.

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_{j=1}^n \left(2b\alpha(\theta x_{(j)})^a \beta^{a-1} e^{-(\theta\beta x_{(j)})^a} \right) \left(-\bar{b}e^{-(\theta x_{(j)})^a} - be^{-(\theta x_{(j)})^a} + 1 - \frac{j}{n+1} \right) = 0, \quad (29)$$

که دارای فرم بسته‌ای نیست و همچنین برآورد کمترین توان‌های دوم خطای θ بهصورت معادله (۳۰) است.

$$\frac{\partial Z}{\partial \theta} = \sum_{j=1}^n \left(2\bar{b}\alpha(x_{(j)})^a \theta^{a-1} e^{-(\theta x_{(j)})^a} + 2b\alpha(\beta(x_{(j)}))^a \theta^{a-1} e^{-(\theta\beta x_{(j)})^a} \right) \left(-\bar{b}e^{-(\theta x_{(j)})^a} - be^{-(\theta x_{(j)})^a} + 1 - \frac{j}{n+1} \right) = 0. \quad (30)$$

برآورده‌گر کمترین توان‌های دوم خطای وزنی با توجه به مطالب ذکرشده در برآورده‌گر کمترین توان‌های دوم خطای، برآورده‌گر کمترین توان‌های دوم خطای وزنی با مینیمم کردن معادله (۳۱) بهدست می‌آید.

$$\sum_{j=1}^n w_j \left[F(X_{(j)}; \alpha, \beta, \theta) - \frac{j}{n+1} \right]^2, \quad (31)$$

که در آن

$$w_j = \frac{1}{\text{Var}(F(X_j; \alpha, \theta))}, \quad (32)$$

و نیز، $j = 1, 2, \dots, n$. بنابراین، مینیمم‌سازی

$$Z' = \frac{\partial Z}{\partial \beta} = - \left(\alpha \beta^{a-1} \theta^a \sum_{j=1}^k x_{ij}^a \right) \left(e^{-\theta^a \beta^{(a-1)} \sum_{j=1}^k x_{ij}^a} \right), \quad (21)$$

با جای‌گذاری (۲۱) در معادله (۲۰)، برآورده‌گر ماکسیمم درست‌نمایی β بهدست می‌آید که دارای فرم بسته‌ای نیست و برآورده‌گر ماکسیمم درست‌نمایی θ بهصورت معادله (۲۲) محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta} = \frac{n\alpha}{\theta} - \alpha \theta^{a-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^a \right) + \frac{\left(\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} Z \right)}{\left(\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} Z \right)} = 0, \quad (22)$$

که در آن

$$Z' = \frac{\partial Z}{\partial \theta} = - \left(\alpha \theta^{(a-1)} \beta^{(a-1)} \sum_{j=1}^k x_{ij}^a \right) e^{-\theta^a \beta^{(a-1)} \left(\sum_{j=1}^k x_{ij}^a \right)}. \quad (23)$$

با جای‌گذاری (۲۳) در معادله (۲۲) برآورده‌گر ماکسیمم درست‌نمایی θ بهدست می‌آید که دارای فرم بسته‌ای نیست. معادله‌های (۲۰) و (۲۲) برای برآورد پارامترهای مجهول β و θ می‌تواند با استفاده از هر روش تکرار عددی مانند نیوتون-رافسن بهطور همزمان حل شود.

برآورده‌گر کمترین توان‌های دوم خطای اگر (X_1, X_2, \dots, X_n) یک نمونه تصادفی با تابع توزیع $F(\cdot)$ و $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n$ نشان‌دهنده آماره‌های مرتب باشد، با توجه به (Johnson et al. (1995) امید ریاضی، واریانس و کوواریانس تابع توزیع بهصورت معادلات (۲۴) تا (۲۶) نوشته می‌شوند.

$$E(F(X_{(j)}; \alpha, \beta, \theta)) = \frac{j}{n+1}, \quad (24)$$

$$\text{Var}(F(X_{(j)}; \alpha, \beta, \theta)) = \frac{j(n+1-j)}{(n+1)^2(n+2)}, \quad (25)$$

$$\text{Cov}(F(X_{(j)}; \alpha, \beta, \theta), F(X_{(i)}; \alpha, \beta, \theta)) = \frac{j(n+1-i)}{(n+1)^2(n+2)}, \quad (26)$$

که در آن $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$ با مینیمم کردن تابع $\sum_{j=i}^n \left(F(X_{(j)}; \alpha, \beta, \theta) - \frac{j}{n+1} \right)^2$ کمترین توان‌های دوم خطای بهدست می‌آید. فرض کنید k تا از

Stephens (1974) مراجعه کنید.

آنگاه مینیمم‌سازی معادله (۳۷) نسبت به β و θ به ترتیب $\hat{\theta}_{ad}$ و $\hat{\beta}_{ad}$ را می‌دهد.

$$\begin{aligned} AD(\alpha, \theta) = & -n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (2j-1) \\ & \left[\ln(F(X_{(j)}; \alpha, \beta, \theta)) + \ln(\bar{F}(X_j; \alpha, \beta, \theta)) \right]^2 = \\ & -n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (2j-1) \left[\ln \left(-be^{-\theta \beta x_{(j)}} - \bar{b} e^{-\theta x_{(j)}} + 1 \right) + \right. \\ & \left. \ln \left(be^{-\theta \beta x_{(n+1-j)}} + \bar{b} e^{-\theta x_{(n+1-j)}} \right) \right]^2, \end{aligned} \quad (37)$$

که در آن

$$\bar{F}(.) = 1 - F(.), \quad (38)$$

مدل آمیخته گشتاوری و ماسیم درستنمایی Read (1981) روشنی را ارائه کرد که از مشکل معادلات پیچیده جلوگیری می‌کند. براساس این روش، جایگزینی برخی اما نه همه معادلات سیستم، ممکن است آن را بیشتر کنترل کند. با توجه به معادله (۱۵) برآورده گر آمیخته پارامتر θ به صورت معادله (۳۹) است.

$$\hat{\theta}_{mix} = \hat{\theta}_{mm} = \frac{-A_2 + \sqrt{\Delta}}{2A_1} = \frac{-A_2 + \sqrt{A_2^2 - 4A_3A_1}}{2A_1}, \quad (39)$$

و همچنین برای به دست آوردن برآورده گر آمیخته β (یعنی $\hat{\beta}_{mix}$)، کافی است که در معادله (۲۰) برای برآورده ماسیم درستنمایی β ، به جای پارامتر θ ، برآورده گر آمیخته آن، یعنی $\hat{\theta}_{mix}$ را قرار دهیم.

$$\frac{\alpha K}{\beta} - \frac{\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} \alpha \beta^{a-1} \hat{\theta}_{mix}^a \sum_{j=1}^k (x_{i_j})^\alpha e^{-\hat{\theta}_{mix}^a (\beta^{a-1}) \sum_{j=1}^k (x_{i_j})^a}}{\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} e^{-\hat{\theta}_{mix}^a (\beta^{a-1}) \sum_{j=1}^k (x_{i_j})^a}} = 0, \quad (40)$$

که در آن با حل معادله (۴۰) برآورده گر آمیخته β ، یعنی $\hat{\beta}_{mix}$ به دست می‌آید.

محاسبه حق‌بیمه خالص

در این بخش، برآورده گر حق‌بیمه خالص با استفاده از برآورده‌گرهای مختلف پارامترهای مجهول به دست می‌آید. می‌دانیم که حق‌بیمه خالص به صورت معادله (۴۱) تعریف شده است.

$$\sum_{j=1}^n w_j \left[-be^{-\theta \beta x_{(j)}} - \bar{b} e^{-\theta x_{(j)}} + 1 - \frac{j}{n+1} \right]^2, \quad (33)$$

نسبت به β و θ ، به ترتیب $\hat{\theta}_{wls}$ و $\hat{\beta}_{wls}$ را می‌دهد که در آن:

$$w_j = \frac{(n+1)^2 (n+2)}{j(n+1-j)}, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

برآورده گر صدکی

روش دیگری که سعی می‌کنیم پارامترها را براساس آن برآورد کنیم، برآورده گر صدکی است. برآورده گر صدکی را Kao (1958) و Kao (1959) ارائه کردند. در این روش براساس معکوستابع توزیع تجمعی برآورده‌گرهای به دست آمده است. بنابراین مینیمم‌سازی

$$\sum_{j=1}^n [F(X_j; \alpha, \beta, \theta) - p_j]^2, \quad (34)$$

نسبت به پارامترهای مجهول، برآورده گر صدکی از پارامترها را می‌دهد که p_j صدک j ام و $j=1, 2, \dots, n$ است. بنابراین، $\hat{\beta}_p$ و $\hat{\theta}_p$ می‌تواند با مینیمم‌سازی معادله (۳۵) به دست آید.

$$\sum_{j=1}^n \left[-be^{-\theta \beta x_{(j)}} - \bar{b} e^{-\theta x_{(j)}} + 1 - p_j \right]^2, \quad (35)$$

برآورده گر کرامر فون میسز

در اینجا، برآورده گر کرامر فون میسز پارامترهای مجهول بحث شده است. $\hat{\theta}_{cvm}$ و $\hat{\beta}_{cvm}$ با مینیمم کردن معادله (۳۶) نسبت به β و θ به ترتیب به دست آمده است.

$$\begin{aligned} C(\alpha, \theta) = & \frac{1}{12n} + \sum_{j=1}^n \left[F(X_j; \alpha, \theta) - \frac{2j-1}{2n} \right]^2 = \\ & \frac{1}{12n} + \sum_{j=1}^n \left[-be^{-\theta \beta x_{(j)}} - \bar{b} e^{-\theta x_{(j)}} + 1 - \frac{2j-1}{2n} \right]^2, \end{aligned} \quad (36)$$

برآورده گر اندرسون دارلینگ

در نهایت، برآورده گر اندرسون دارلینگ پارامترهای مجهول توزیع واپیول در حضور داده‌های دورافتاده در این بخش به دست آمده است. یکی از آزمون‌های نیکویی برازش برای بررسی نرمال بودن، آماره آزمون اندرسون دارلینگ است که اندرسون و دارلینگ در سال ۱۹۵۲ پیشنهاد کردند. این روش، آزمون همگرایی سریع در شرایط مجانبی است (برای اطلاعات بیشتر به Pettitt (1976) و Anderson and Darling (1954) و

$$\text{مقایسه برآوردهای حق بیمه} \quad P = E(X), \quad (41)$$

در بخش‌های چهارم و پنجم، برآوردهای مختلف حق بیمه توزیع وایبول در حضور داده‌های دورافتاده به دست آمد. در این بخش، عملکرد همه برآوردها به طور عددی از لحاظ اribی، میانگین توان دوم خطأ و واریانس تعمیم‌یافته مقایسه شده‌اند. به‌منظور بررسی کارآیی برآوردها، وقتی $\beta = 0$ مجھول و α معلوم باشد، در نمونه‌هایی به اندازه $n = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$ کارآیی برآوردها، وقتی $\beta = 1.5$ و $\theta = 3$ این فرایند ۵۰۰۰ بار تکرار شد. نتایج به شرح جداول ۱ و ۶ و نمودارهای ۱ تا ۳ آمده است. برای شبیه‌سازی و محاسبات عددی از نرم‌افزار R استفاده شده است. خلاصه‌ای از نتایج حاصل از مطالعه شبیه‌سازی به شرح ذیل است:

(الف) برای $n = 10, 20, 30$ و $k = 1$ با افزایش حجم نمونه، واریانس تعمیم‌یافته کاهش می‌یابد که این بدان معنی است

که در آن X نمایانگر حق بیمه است (برای اطلاعات بیشتر درباره روش‌های تعیین حق بیمه به Young (2006) مراجعه کنید). با استفاده از معادله (۱۰) داریم.

$$P = E(X) = \frac{1}{\theta} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \left(b \frac{1}{\beta} + \bar{b} \right). \quad (42)$$

در قسمت‌های قبل، برآوردهای $\hat{\beta}$ و $\hat{\theta}$ از روش‌های مختلف به دست آمد، ولی فرم بسته‌ای برای آن‌ها حاصل نشد، لذا با جایگزین کردن این برآوردها در معادله (۴۲)، برآوردهای حق بیمه به صورت برآورد جایگزین شده (Plug-in Estimator) حاصل می‌شود.

جدول ۱: واریانس تعمیم‌یافته $\hat{\beta}$ و $\hat{\theta}$ بازای β و θ

Table 1: Generalized variance of $\hat{\beta}$ and $\hat{\theta}$ for $\alpha = 70, \beta = 1.5, \theta = 3$

80	70	60	50	40	30	20	10	
3.87100E-05	1.26922E-06	6.06231E-07	3.21285E-07	2.14166E-07	1.69703E-07	1.55588E-07	1.92214E-07	GV_{mm}
1.97538E-08	1.99333E-08	2.46108E-08	2.84662E-08	3.65628E-08	5.22965E-08	8.36677E-08	1.79596E-07	GV_{ml}
3.11076E-08	3.15600E-08	3.85760E-08	4.25733E-08	5.63784E-08	7.93896E-08	1.21521E-07	2.44235E-07	GV_{mix}
7.97425E-09	5.61779E-06	4.42858E-05	7.15781E-06	2.35275E-05	1.68057E-03	4.80476E-02	1.23522E-01	GV_{ls}
2.45829E-08	2.46707E-08	2.56103E-06	9.78616E-05	9.19961E-03	4.59410E-02	1.32637E-01	8.15719E-02	GV_{wls}
2.93741E-08	1.46580E-09	6.78105E-07	2.93950E-05	3.05403E-05	6.63587E-02	4.79328E-05	4.39627E-02	GV_p
1.91250E-09	5.42587E-08	2.81324E-08	3.09258E-08	1.11028E-08	1.26374E-05	5.50953E-05	3.15833E-04	GV_{cvm}
8.01101E-06	6.95291E-06	8.25041E-06	8.91714E-06	9.42261E-06	9.42261E-06	9.24930E-06	9.55168E-06	GV_{ad}

جدول ۲: اربی حق بیمه، $\hat{\beta}$ و $\hat{\theta}$ بازای $\alpha = 70, \beta = 1.5, \theta = 3$

Table 2: Bias of premium, $\hat{\beta}$ and $\hat{\theta}$ for $\alpha = 70, \beta = 1.5, \theta = 3$ and $k = 1$

80	70	60	50	40	30	20	10	$\frac{n}{\text{برآوردها}}$
6.613597	4.608409	3.402212	2.593288	2.013110	1.576279	1.235106	0.955721	$\hat{\beta}_{mm}$
-0.020410	-0.021725	-0.023361	-0.025361	-0.028951	-0.034674	-0.045903	-0.080321	$\hat{\theta}_{mm}$
0.009641	0.009457	0.009198	0.008803	0.008276	0.007367	0.005515	-0.000010	$\hat{\beta}_{mm}$
0.013005	0.012189	0.012264	0.012404	0.012592	0.012583	0.012992	0.011409	$\hat{\beta}_{ml}$
0.000300	0.000245	0.000301	0.000487	0.000497	0.000675	0.001127	0.002528	$\hat{\theta}_{ml}$
0.009589	0.009397	0.009124	0.008731	0.008170	0.007218	0.005302	-0.000420	$\hat{\beta}_{nl}$
0.023521	0.023343	0.024286	0.025545	0.027582	0.030612	0.037074	0.054289	$\hat{\beta}_{mix}$
-0.020410	-0.021725	-0.023361	-0.025361	-0.028951	-0.034674	-0.045903	-0.080321	$\hat{\theta}_{mix}$
0.011859	0.011802	0.011709	0.011547	0.011365	0.011029	0.010302	0.008020	$\hat{\beta}_{mix}$
0.000038	0.000299	0.000659	0.015561	0.029723	0.039065	0.056561	0.152185	$\hat{\beta}_{ls}$
-0.003550	-0.003666	-0.007294	-0.002184	-0.006010	-0.003766	-0.013328	-0.014508	$\hat{\theta}_{ls}$
0.009245	0.009061	0.008408	0.008489	0.007509	0.006806	0.003836	-0.002298	$\hat{\beta}_{ls}$
0.038261	0.039054	0.044906	0.061221	0.072476	0.106568	0.179438	0.164468	$\hat{\beta}_{wls}$
0.000085	-0.000022	-0.000053	0.000231	-0.001159	-0.003675	-0.007245	-0.013306	$\hat{\theta}_{wls}$
0.009568	0.009372	0.009097	0.008679	0.007986	0.006752	0.004361	-0.002463	$\hat{\beta}_{wls}$
0.000078	0.000094	0.000322	0.024120	0.042782	0.077545	0.057565	0.162843	$\hat{\beta}_p$
-0.003718	-0.000092	-0.005916	0.000690	-0.002708	-0.000921	-0.004132	0.002380	$\hat{\theta}_p$
0.009000	0.009195	0.008256	0.008415	0.007366	0.006419	0.003743	-0.002876	$\hat{\beta}_p$
0.000005	0.000015	0.000011	-0.000012	-0.004159	0.000115	0.003230	0.002263	$\hat{\beta}_{cvm}$
-0.002246	-0.004731	-0.008341	-0.004387	-0.002177	-0.005818	-0.012754	-0.011819	$\hat{\theta}_{cvm}$
0.009365	0.008914	0.008259	0.008249	0.007997	0.006678	0.004017	-0.001599	$\hat{\beta}_{cvm}$
0.520921	0.508096	0.357149	0.430097	0.424165	0.428637	0.368719	0.403137	$\hat{\beta}_{ad}$
-1.578636	-1.572513	-1.531119	-1.546045	-1.546783	-1.544725	-1.531580	-1.540284	$\hat{\theta}_{ad}$
0.377298	0.373518	0.352403	0.358118	0.356877	0.353100	0.342251	0.329843	$\hat{\beta}_{ad}$

جدول ۳: میانگین توان دوم خطای حقیقیمه، $\hat{\beta}$ و $\hat{\theta}$ بهازای $k = 1$ و $\alpha = 70, \beta = 1.5, \theta = 3$

Table 3: Mean square error of insurance premium, $\hat{\beta}$ and $\hat{\theta}$ for $\alpha = 70, \beta = 1.5, \theta = 3$ and $k = 1$

80	70	60	50	40	30	20	10	n	برآوردها
43.852004	21.270536	11.588148	6.730986	4.055707	2.486428	1.526584	0.914074	$\hat{\beta}_{mm}$	
0.000454	0.000513	0.000594	0.000700	0.000909	0.001299	0.002249	0.006739	$\hat{\theta}_{mm}$	
0.000093	0.000090	0.000085	0.000078	0.000069	0.000055	0.000032	0.000003	\hat{p}_{mm}	
0.000988	0.000928	0.000943	0.000900	0.000952	0.000980	0.001033	0.001006	$\hat{\beta}_{ml}$	
0.000024	0.000026	0.000032	0.000039	0.000047	0.000066	0.000101	0.000226	$\hat{\theta}_{ml}$	
0.000092	0.000089	0.000084	0.000077	0.000067	0.000053	0.000029	0.000002	\hat{p}_{ml}	
0.001378	0.001330	0.001389	0.001402	0.001557	0.001763	0.002239	0.003824	$\hat{\beta}_{mix}$	
0.000454	0.000513	0.000594	0.000700	0.000909	0.001299	0.002249	0.006739	$\hat{\theta}_{mix}$	
0.000141	0.000140	0.000138	0.000134	0.000130	0.000123	0.000108	0.000068	\hat{p}_{mix}	
0.000003	0.000408	0.001299	0.000739	0.001538	0.079502	0.612501	1.460405	$\hat{\beta}_{ls}$	
0.021561	0.021594	0.043122	0.014423	0.035980	0.021606	0.079039	0.086155	$\hat{\theta}_{ls}$	
0.000347	0.000342	0.000590	0.000246	0.000488	0.000304	0.000945	0.000994	\hat{p}_{ls}	
0.002323	0.002343	0.070741	2.139438	1.274108	2.135238	3.111170	1.061570	$\hat{\beta}_{wls}$	
0.000029	0.000030	0.000037	0.000046	0.007252	0.021644	0.043131	0.079042	$\hat{\theta}_{wls}$	
0.000092	0.000088	0.000083	0.000076	0.000150	0.000303	0.000529	0.000971	\hat{p}_{wls}	
0.000007	0.000043	0.000024	0.004645	0.002897	3.074393	0.004270	1.039910	$\hat{\beta}_p$	
0.028742	0.007230	0.043148	0.007235	0.028801	0.021628	0.050318	0.043388	$\hat{\theta}_p$	
0.000429	0.000171	0.000588	0.000158	0.000399	0.000299	0.000607	0.000503	\hat{p}_p	
0.000000	0.000002	0.000001	0.000001	0.000094	0.000352	0.000710	0.004011	$\hat{\beta}_{cvm}$	
0.014401	0.028755	0.050319	0.028763	0.014417	0.035954	0.079013	0.078996	$\hat{\theta}_{cvm}$	
0.000262	0.000427	0.000675	0.000415	0.000237	0.000475	0.000949	0.000909	\hat{p}_{cvm}	
0.300706	0.286001	0.139618	0.200382	0.194808	0.199080	0.149837	0.177763	$\hat{\beta}_{ad}$	
2.501719	2.481907	2.350353	2.396420	2.398889	2.392302	2.352259	2.379324	$\hat{\theta}_{ad}$	
0.144818	0.141826	0.125477	0.129700	0.128803	0.126068	0.118449	0.110076	\hat{p}_{ad}	

جدول ۴: واریانس تعمیم یافته $\hat{\beta}$ و $\hat{\theta}$ بهازای $k = 3$ و $\alpha = 70, \beta = 1.5, \theta = 3$

Table 4: Generalized variance of $\hat{\beta}$ and $\hat{\theta}$ for $\alpha = 70, \beta = 1.5, \theta = 3$ and $k = 3$

80	70	60	50	40	30	20	10	n	برآوردها
-1.0912E08	-1.897E08	-1.9171E08	-1.5905E08	1.6600E-08	2.0900E-08	2.6200E-08	4.4200E-08	GV_{mm}	
-5.2187E09	-7.4700E09	-7.5899E09	-7.3745E09	8.4200E-09	1.3900E-08	1.9300E-08	5.3100E-08	GV_{ml}	
-1.0017E08	-1.0187E08	-1.1286E08	-1.0466E08	1.2600E-08	1.9500E-08	2.7200E-08	5.5000E-08	GV_{mix}	
-0.0817E08	-1.1317E08	-1.4030E08	-2.6497E05	5.1500E-06	2.4500E-08	4.9900E-05	5.4200E-05	GV_{ls}	
-1.0313E08	-1.1613E08	-1.2515E08	-1.3969E08	1.7200E-08	8.6000E-05	5.4400E-06	5.6300E-06	GV_{wls}	
-1.1153E08	-1.1456E08	-1.1821E08	-1.0064E05	5.7900E-03	5.9181E-03	1.0552E-04	8.6500E-06	GV_p	
-2.1246E09	-1.0146E08	-4.9640E05	-4.6588E06	1.3800E-05	7.5900E-06	9.7800E-06	9.3300E-08	GV_{cvm}	
-1.0013E05	-1.0878E05	-1.0034E05	-7.1534E05	7.4300E-06	8.5700E-06	9.1200E-06	7.3300E-06	GV_{ad}	

اریبی کمتری است و بعد از برآوردگر صدکی، برآوردگرهای کرامر_فون_میسز و کمترین توان دوم خطای دارای کمترین اند و برای حجم نمونه بزرگ بهتری ترتیب برآوردگرهای صدکی، کرامر_فون_میسز و کمترین توان دوم خطای حقیقیمه، دارای کمترین اند و عملکرد بهتری نسبت به سایر برآوردگرهای کمترین اند و عملکرد بهتری در مقایسه با سایر برآوردگرهای هستند. برای حجم نمونه بزرگ بهتری ترتیب، برآوردگرهای کرامر_فون_میسز، ماسکیم درستنمایی و گشتاوری کمترین اند و بهترین برآوردگر است. برای حجم نمونه بزرگ از بتا برآوردگر اریبی (بتا) برآوردگر کرامر_فون_میسز دارای کمترین اند و بهترین برآوردگر است. برای حجم نمونه بزرگ از بتا برآوردگرهای کرامر_فون_میسز، صدکی و کمترین توان دوم خطای بهتری دارای کمترین اند و از لحظه اریبی (بتا) برآوردگر صدکی و کمترین توان دوم خطای حقیقیمه درستنمایی و صدکی بهتری دارد، زیرا دارای

که برآوردگرها سازگارند و بررسی‌ها نشان‌دهنده آن است که برآوردگرهای ماسکیم درستنمایی و آمیخته گشتاوری و ماسکیم درستنمایی با افزایش حجم نمونه دارای عملکرد بهتری نسبت به دیگر برآوردگرهای هستند، چون دارای واریانس تعمیم یافته کمتری در مقایسه با سایر برآوردگرهای هستند. برای حجم نمونه بزرگ بهتری ترتیب، برآوردگرهای کرامر_فون_میسز، ماسکیم درستنمایی، صدکی و آمیخته ماسکیم درستنمایی و گشتاوری دارای عملکرد بهتری در مقایسه با سایر برآوردگرهای هستند. ب) برای $k = 10, 20, 30$ و $n = 10$ ، حقیقیمه برآوردگر صدکی در مقایسه با سایر برآوردگرهای عملکرد بهتری دارد، زیرا دارای

جدول ۵: اریبی حقبیمه، $\hat{\beta}$ و $\hat{\theta}$ بهای خطا برای $k = 3$ و $\alpha = 70, \beta = 1.5, \theta = 3$

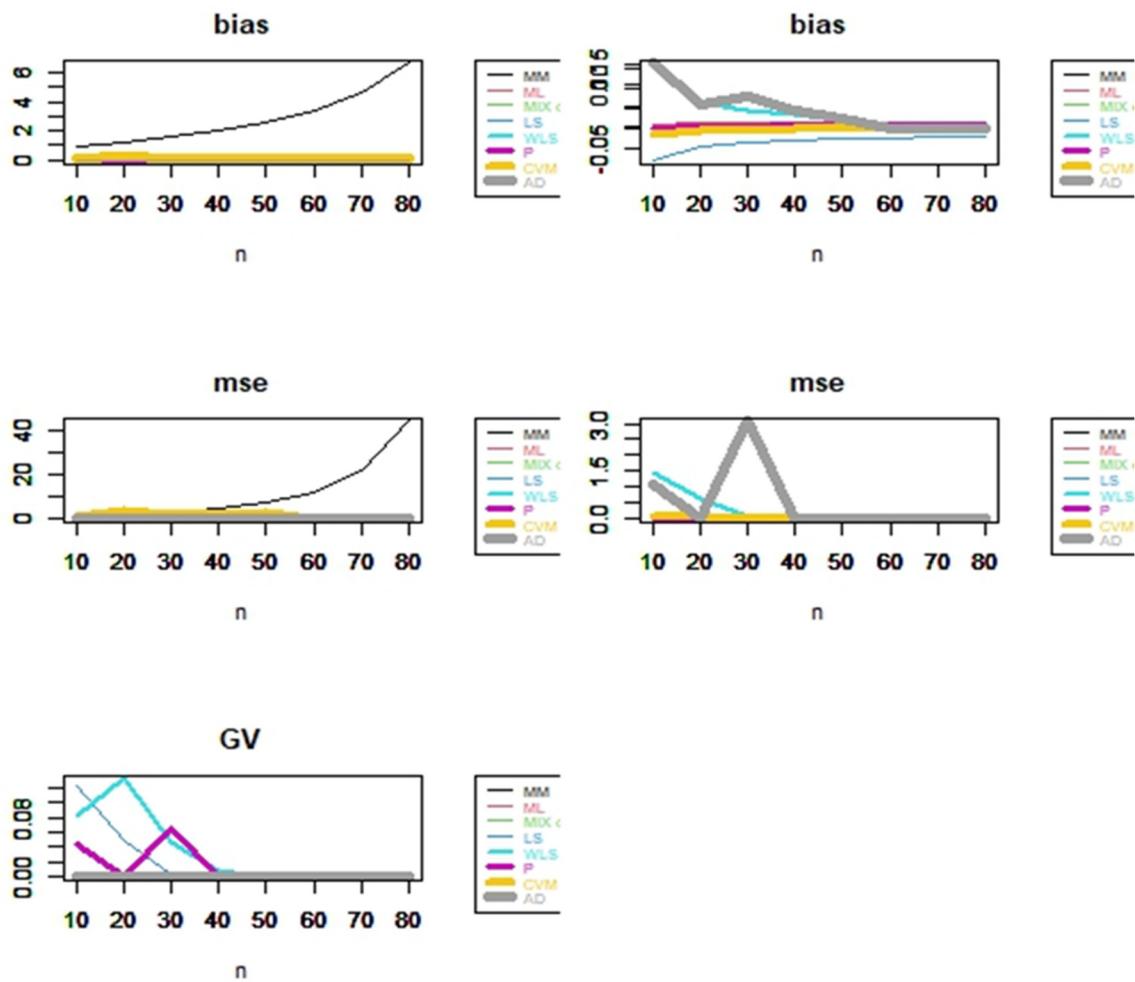
Table 5: Bias of premium $\hat{\beta}$ and $\hat{\theta}$ for $\alpha = 70, \beta = 1.5, \theta = 3$ and $k = 3$

80	70	60	50	40	30	20	10	n برآورد
1.470136	1.342069	1.234950	1.136308	1.043646	0.955707	0.870904	0.778491	$\hat{\beta}_{mm}$
-0.039010	-0.04101	-0.04544	-0.053053	-0.063128	-0.080208	-0.115863	-0.227768	$\hat{\theta}_{mm}$
0.027328	0.028338	0.027505	0.026485	0.024802	-0.000030	-0.005519	-0.022033	$\hat{\beta}_{ml}$
0.0056801	0.004580	0.003757	0.003776	0.003150	0.002876	0.002904	0.001890	$\hat{\theta}_{ml}$
0.000132	0.000503	0.000985	0.000281	0.000525	0.001172	0.001311	0.003346	$\hat{\beta}_{ml}$
0.029350	0.028260	0.027422	0.026391	0.024711	-0.000163	-0.005706	-0.022443	$\hat{\beta}_{ml}$
0.023550	0.025690	0.027387	0.030992	0.035729	0.044763	0.063962	0.127084	$\hat{\beta}_{mix}$
-0.039012	-0.04101	-0.04544	-0.053053	-0.063128	-0.080208	-0.115863	-0.227768	$\hat{\theta}_{mix}$
0.033010	0.032700	0.032358	0.032016	0.031339	0.008130	0.005710	-0.003167	$\hat{\beta}_{mix}$
0.015698	0.014598	0.013217	0.012882	0.012238	0.011512	0.011847	0.011612	$\hat{\beta}_{ls}$
-0.000105	-0.00020	0.000413	-0.015268	-0.003157	0.000107	-0.015360	-0.011244	$\hat{\theta}_{ls}$
0.031235	0.028275	0.027416	0.024753	0.024364	-0.000174	-0.007286	-0.023127	$\hat{\beta}_{ls}$
0.015267	0.014258	0.012579	0.012096	0.011509	0.009486	0.010852	0.010747	$\hat{\beta}_{wls}$
0.0000520	0.000022	0.000534	-0.000191	-0.000018	-0.002696	-0.003207	-0.004972	$\hat{\theta}_{wls}$
0.029147	0.028253	0.027408	0.026370	0.024679	-0.000525	-0.006025	-0.022543	$\hat{\beta}_{wls}$
0.015311	0.014612	0.013145	0.012780	0.028513	0.033665	0.014419	0.009138	$\hat{\beta}_p$
0.0009523	0.001034	0.001872	-0.004512	-0.000852	-0.002633	0.001883	0.009463	$\hat{\theta}_p$
0.029061	0.028141	0.027259	0.025535	0.024100	-0.001222	-0.006604	-0.023883	$\hat{\beta}_p$
0.003852	0.002779	0.001828	0.002216	0.001621	0.000954	0.001558	0.001181	$\hat{\beta}_{cvm}$
-0.000052	-0.00004	-0.02927	-0.003062	-0.008789	-0.002352	-0.005404	0.001550	$\hat{\theta}_{cvm}$
0.032144	0.028331	0.024214	0.026119	0.023796	-0.000395	-0.006226	-0.022229	$\hat{\beta}_{cvm}$
0.613400	0.512420	0.413913	0.344350	0.457913	0.440960	0.403016	0.349001	$\hat{\beta}_{ad}$
-1.593504	-1.57290	-1.54372	-1.532222	1.549700	-1.546344	-1.542829	-1.535349	$\hat{\theta}_{ad}$
0.386591	0.385821	0.369460	0.361285	0.363760	0.331751	0.314774	0.265815	$\hat{\beta}_{ad}$

جدول ۶: میانگین توان دوم خطای حقبیمه، $\hat{\beta}$ و $\hat{\theta}$ بهای خطا برای $k = 3$ و $\alpha = 70, \beta = 1.5, \theta = 3$

Table 6: Mean square error of insurance premium, $\hat{\beta}$ and $\hat{\theta}$ for $\alpha = 70, \beta = 1.5, \theta = 3$ and $k = 3$

80	70	60	50	40	30	20	10	n برآوردها
2.01253	1.801670	1.525489	1.291486	1.089438	0.913589	0.758654	0.606224	$\hat{\beta}_{mm}$
0.001360	0.001730	0.002116	0.002869	0.004055	0.006531	0.013572	0.052149	$\hat{\theta}_{mm}$
0.000856	0.000804	0.000757	0.000702	0.000616	0.000001	0.000032	0.000488	$\hat{\beta}_{mm}$
0.000275	0.000240	0.000244	0.000210	0.000197	0.000220	0.000210	0.000262	$\hat{\beta}_{ml}$
0.000027	0.000031	0.000035	0.000040	0.000048	0.000075	0.000112	0.000306	$\hat{\theta}_{ml}$
0.000851	0.000799	0.000752	0.000697	0.000611	0.000001	0.000034	0.000506	$\hat{\beta}_{ml}$
0.000761	0.000881	0.000977	0.001158	0.001466	0.002216	0.004294	0.016399	$\hat{\beta}_{mix}$
0.001456	0.001730	0.002116	0.002869	0.004055	0.006531	0.013572	0.052149	$\hat{\theta}_{mix}$
0.001092	0.001070	0.001048	0.001026	0.000983	0.000067	0.000034	0.000013	$\hat{\beta}_{mix}$
0.000538	0.000528	0.000512	0.000463	0.000435	0.000424	0.000703	0.001978	$\hat{\beta}_{ls}$
0.000032	0.000038	0.000042	0.089732	0.018042	0.000094	0.089638	0.053781	$\hat{\theta}_{ls}$
0.000852	0.000800	0.000752	0.001664	0.000803	0.000001	0.001042	0.001042	$\hat{\beta}_{ls}$
0.000652	0.000558	0.000480	0.000462	0.000446	0.004886	0.000486	0.001877	$\hat{\beta}_{wls}$
0.000029	0.000034	0.000039	0.000046	0.000058	0.018033	0.018027	0.018162	$\hat{\theta}_{wls}$
0.000852	0.000799	0.000752	0.000696	0.000610	0.000205	0.000232	0.000669	$\hat{\beta}_{wls}$
0.000588	0.000529	0.000456	0.000444	0.321345	0.166055	0.006054	0.002588	$\hat{\beta}_p$
0.000031	0.000039	0.000046	0.035922	0.018052	0.035891	0.018055	0.018468	$\hat{\theta}_p$
0.000840	0.000792	0.000744	0.001074	0.000790	0.000414	0.000244	0.000729	$\hat{\beta}_p$
0.000301	0.000291	0.000281	0.000265	0.000260	0.000421	0.000276	0.000346	$\hat{\beta}_{cvm}$
0.000052	0.000038	0.180193	0.017954	0.053900	0.018066	0.035930	0.000380	$\hat{\theta}_{cvm}$
0.000769	0.000803	0.002709	0.000894	0.001192	0.000206	0.000437	0.000497	$\hat{\beta}_{cvm}$
0.351410	0.291318	0.185775	0.128892	0.231765	0.211974	0.177168	0.132000	$\hat{\beta}_{ad}$
2.582651	2.483567	2.389717	2.352914	2.408907	2.397471	2.387199	2.362506	$\hat{\theta}_{ad}$
0.164085	0.151088	0.137909	0.131525	0.133899	0.111312	0.100208	0.071215	$\hat{\beta}_{ad}$



نمودار ۱: اریبی، میانگین توان دوم خطأ و واریانس نتایج شبیه‌سازی بهازای $k=1$, $\beta=1.5$, $\theta=3$, $\alpha=70$ و $\text{Fig. } 1: \text{ Bias, mean squared error and generalized variance of different estimators based on simulation results for}$

$$\beta=1.5, \theta=3, \alpha=70 \text{ and } k=1$$

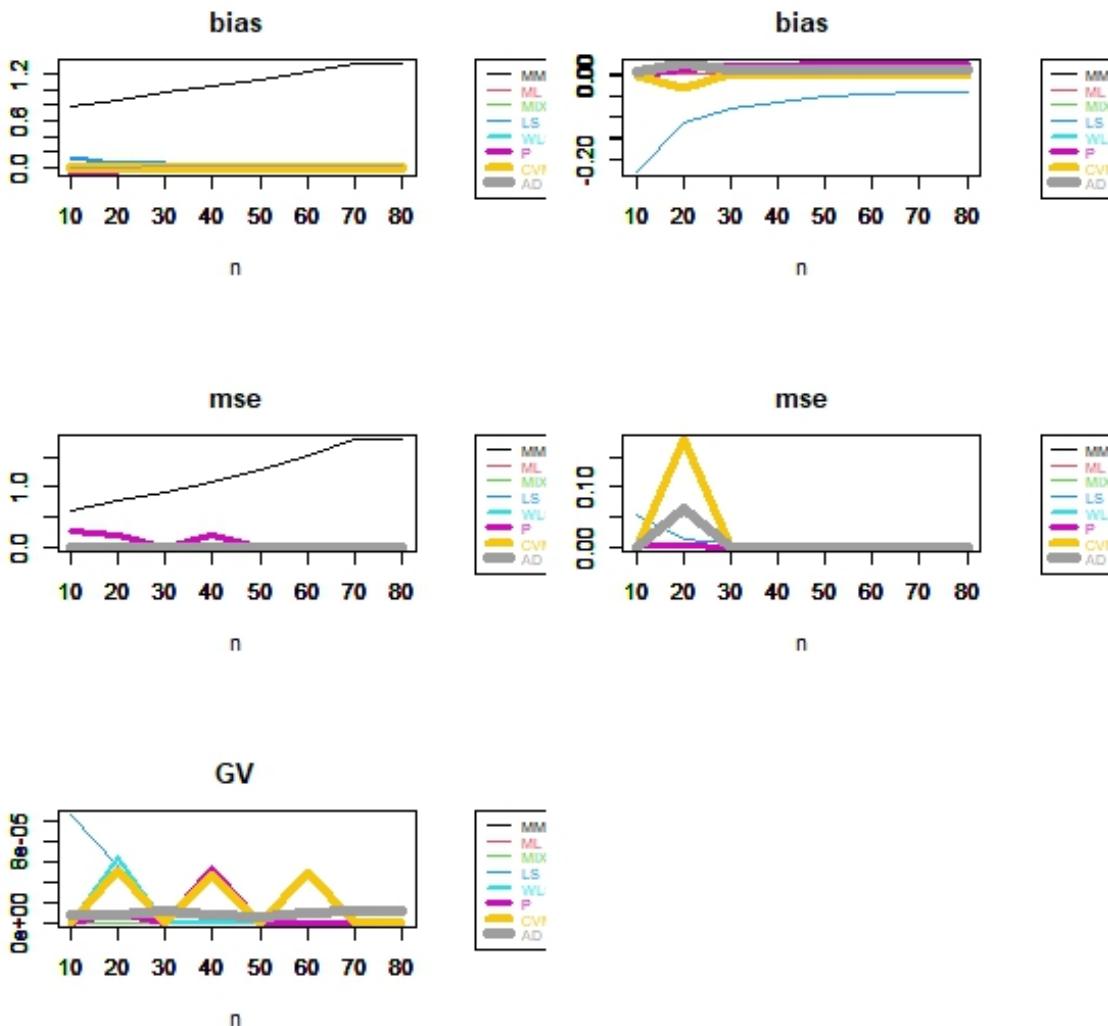
از داده‌های خسارت بیمه آتش‌سوزی دانمارک گرفته شده است. داده‌های دانمارکی توسط مت ریتکار از کپنه‌اگ ارائه شده است (داده‌ها در بسته evir نرم‌افزار R موجود است). این داده‌ها شامل خسارت‌های بزرگ بیمه آتش‌سوزی در دانمارک است که از تاریخ پنجشنبه ۳ ژانویه ۱۹۸۰ تا دوشنبه ۳۱ دسامبر ۱۹۹۰ و شامل ۲۱۶۷ مشاهده است. نمونه تصادفی ۳۰ تایی انتخاب شده از این داده‌ها به شرح زیر است

1.۶۶۴۶۸۵, ۱.۰۰۲۸۲۹۳۲, ۲۳.۲۸۳۸۵۹, ۱.۰۰۹۹۴۷۶, ۶.۵۱۱۰۹۱,
 ۱۰.۱۷۸۰۲۴, ۴.۲۳۳۷۰۰, ۱.۳۰۰۰۰, ۱.۱۵۰۴۳۴
 ۱.۰۶۰۰۰۰, ۱.۰۰۰۰۰۰, ۲.۳۶۷۹۸۷, ۱.۰۰۵۰۰۰, ۱.۲۶۲۶۴۴,
 ۱.۸۴۱۷۵۳, ۱.۸۶۷۴۰, ۱.۳۲۲۲۵۴, ۱.۳۴۹۷۷۲۲,
 ۱.۷۵۰۱۵۹, ۱.۶۳۹۳۴۴, ۱.۱۵۳۵۰۵, ۲.۷۸۱۸۴۵, ۲.۸۹۲۹۶۰,
 ۲.۶۷۰۱۵۷, ۱۶.۴۱۵۲۶۲, ۱.۴۰۸۲۳۱, ۲.۳۴۲۴۴۹,
 ۱.۷۷۴۶۲۳, ۱.۹۲۸۶۴۰, ۱.۰۰۴۶۳۸.

اریبی هستند و عملکرد بهتری نسبت به سایر برآوردها دارند و برای حجم نمونه بزرگ برآوردهای کمترین توان دوم خطأ، ماکسیمم درست‌نمایی و صدکی بهتری دارای کمترین اریبی برای تنا هستند و دارای عملکرد بهتری نسبت به سایر برآوردها هستند. پ) برای $n=10, 20, 30$ و $k=1$ بهتری دارای برآوردهای گشتاوری، ماکسیمم درست‌نمایی و عملکرد بهتری نسبت کمترین میانگین توان دوم خطأ هستند و عملکرد بهتری نسبت به سایر برآوردها دارند و برای حجم نمونه بزرگ به برآوردهای کمترین توان‌های دوم خطأ عملکرد بهتری در مقایسه با سایر برآوردها دارد، زیرا میانگین توان دوم خطای کمتری نسبت به سایر برآوردها دارد.

مثال‌های کاربردی

مثال ۱. در این مقاله به منظور برآوردهای توزیع وایبول و حق بیمه، یک مثال واقعی ارائه شده است. یک نمونه به اندازه ۳۰

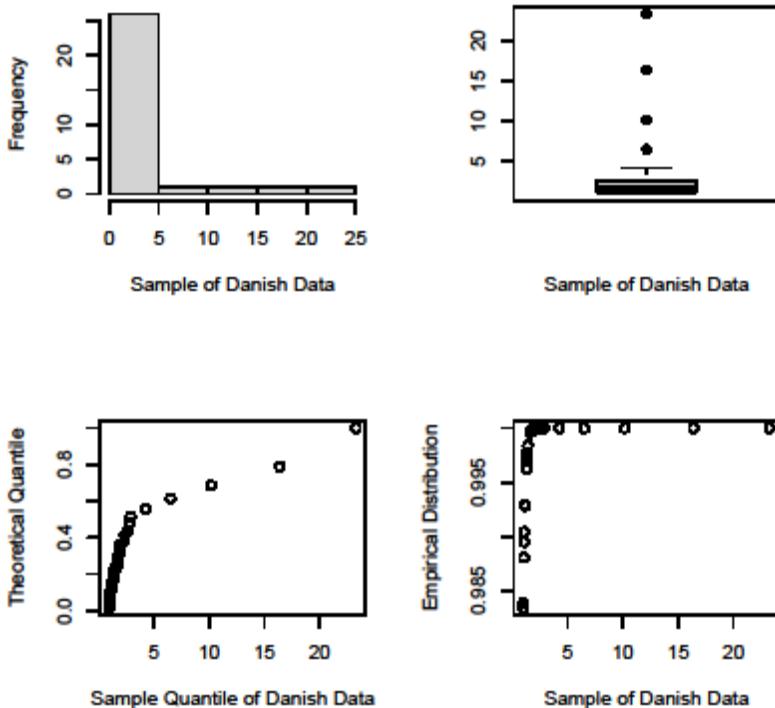


نمودار ۲: اربیبی، میانگین توان دوم خطأ و واریانس تعمیم یافته برآوردهای مختلف براساس نتایج شبیه‌سازی بهازای $\beta = 1.5, \theta = 3, \alpha = 70$ و $k = 3$
Fig. 2: Bias, mean squared error and generalized variance of different estimators based on simulation results for
 $\beta = 1.5, \theta = 3, \alpha = 70$ and $k = 3$

است که توزیع وایبول را در مواجهه با داده‌های دورافتاده برازش دهیم. از طرفی دیگر، تعداد داده‌های دورافتاده (k)، علاوه‌بر پارامترهای β و θ نیز مجهول است. لذا بهازای $k = 1, 2, \dots, 5$ برآورد پارامترهای β و θ به روش‌های گوناگون بهدست آمده و با محاسبه تابع درستنمایی بهازای k ‌های مختلف و برآوردهای پارامتر، آن k ‌ی را بهدست می‌آوریم که تابع درستنمایی تجربی را ماقسیم کند. برآوردهای پارامترها به روش‌های مختلف در **جدول ۷** و **۸** بهازای k ‌های مختلف آمده است. تابع درستنمایی تجربی آن نیز بهازای k ‌های مختلف محاسبه شده است که در **جدول ۹** نشان داده شده است. بنابراین، با توجه به مقادیر تابع درستنمایی نسبت به k ، مشخص است که به طور مثال در روش گشتاوری، تابع درستنمایی وقتی ماقسیم است که k برابر ۵ باشد. با قرار دادن مقادیر برآوردهای β و θ در فرمول محاسبه حقیقیه،

برای اینکه بررسی کنیم داده‌های خسارت از توزیع وایبول تبعیت می‌کند یا خیر، از روش‌های توصیفی شامل رسم نمودارهای جعبه‌ای، بافت‌نگار، چندک_چندک و تابع توزیع تجربی استفاده می‌کنیم. همچنین آزمون نیکوبی برازش کلموگروف_اسمیرنوف یک نمونه‌ای برای برازش توزیع وایبول به کار برده می‌شود. نتایج مربوط به روش توصیفی در **نمودار ۳** آمده است. با توجه به نتیجه آزمون کلموگروف_اسمیرنوف و نیز **نمودار ۳**، توزیع متغیر خسارت وایبول است ($p = 0.081$). شایان ذکر است که برآوردهای پارامترهای این توزیع به روش ماقسیم درستنمایی به ترتیب $\hat{\alpha} = 1.3248$ و $\hat{\theta} = 2.9001$ است.

چون می‌دانیم که ممکن است داده دورافتاده در داده‌ها وجود داشته باشد، به این دلیل که خسارت‌هایی که به واحدهای مسکونی وارد می‌شود، بعضی اوقات بیش از حد معمول است، لازم



نمودار ۳: بافت‌نگار، نمودار جعبه‌ای، چندک وتابع توزیع تجربی داده‌های خسارت آتش‌سوزی دانمارک
Fig. 3: Histogram, box plot, quantile-quantile and empirical distribution function of Danish fire damage data

جدول ۷: برآوردهای مختلف β برای $\alpha = 1.3248$ نسبت به k

Table 7: Various estimators of β for $\alpha = 1.3248$ in respect to k

$\hat{\beta}_{ad}$	$\hat{\beta}_{cvm}$	$\hat{\beta}_p$	$\hat{\beta}_{wls}$	$\hat{\beta}_{ls}$	$\hat{\beta}_{mix}$	$\hat{\beta}_{ml}$	$\hat{\beta}_{mm}$	k
2.793501	0.9999996	0.9999997	1.00002044	0.9999995	3.779443	0.1336535	0.1254932	1
2.793501	1.0000236	1.0000209	0.06839348	1.0000285	3.761079	2.8841202	0.2699722	2
2.793501	1.0000243	1.0000214	1.00002152	1.0000293	3.742452	0.1195378	0.4379768	3
2.793501	1.0000247	1.0000183	0.99999969	1.0000297	3.723491	2.9819105	0.6356001	4
2.793501	1.0000255	1.0000225	1.00002267	1.0000305	3.704073	3.0357152	0.8712122	5

جدول ۸: برآوردهای مختلف θ برای $\alpha = 1.3248$ نسبت به k

Table 8: Different estimators of θ for $\alpha = 1.3248$ respect to k

$\hat{\theta}_{ad}$	$\hat{\theta}_{cvm}$	$\hat{\theta}_p$	$\hat{\theta}_{wls}$	$\hat{\theta}_{ls}$	$\hat{\theta}_{mix}$	$\hat{\theta}_{ml}$	$\hat{\theta}_{mm}$	k
6.32406	0.4112209	0.4274100	0.3614717	0.4120285	0.1910469	0.3219974	0.1910469	1
6.32406	0.4112198	0.4274089	0.3873936	0.4120272	0.1870536	0.2344257	0.1870536	2
6.32406	0.4112194	0.4274086	0.3614712	0.4120268	0.1830430	0.4966554	0.1830430	3
6.32406	0.4112191	0.4274084	0.3614725	0.4120264	0.1790135	0.2247280	0.1790135	4
6.32406	0.4112187	0.4274079	0.3614706	0.4120259	0.1749633	0.2197206	0.1749633	5

جدول ۹: تابع درست‌نمایی تجربی نسبت به k

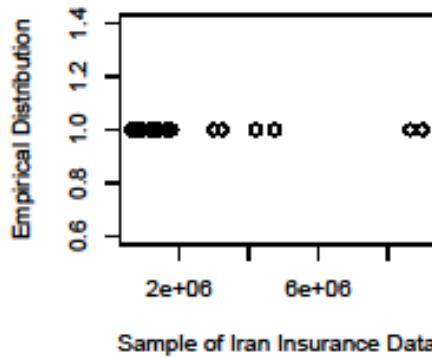
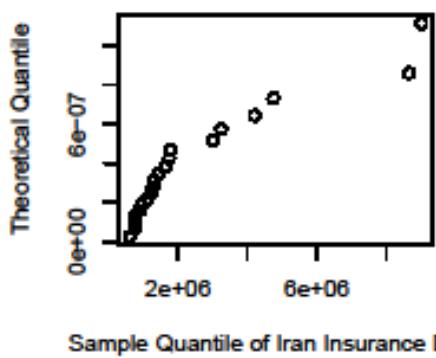
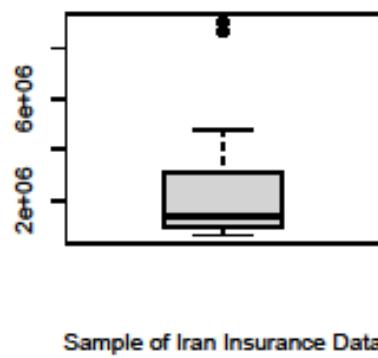
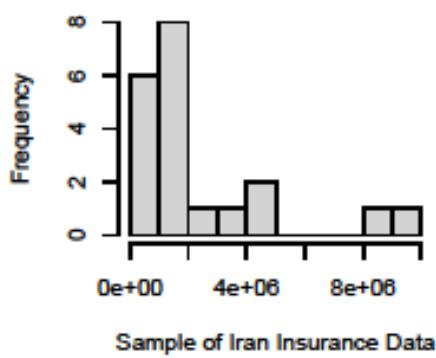
Table 9: Empirical likelihood function with respect to k

$l(\hat{\theta}_{ad}, \hat{\beta}_{ad})$	$l(\hat{\theta}_{cvm}, \hat{\beta}_{cvm})$	$l(\hat{\theta}_p, \hat{\beta}_p)$	$l(\hat{\theta}_{wls}, \hat{\beta}_{wls})$	$l(\hat{\theta}_{ls}, \hat{\beta}_{ls})$	$l(\hat{\theta}_{mix}, \hat{\beta}_{mix})$	$l(\hat{\theta}_{ml}, \hat{\beta}_{ml})$	$l(\hat{\theta}_{mm}, \hat{\beta}_{mm})$	k
-2183.302	-76.22000	-77.83384	-71.92480	-76.29815	-67.79172	-61.97735	-67.69032	1
-2215.391	-73.54580	-75.15964	-55.36909	-73.62395	-64.68653	-63.55078	-65.28727	2
-2248.454	-71.31221	-72.92605	-67.01706	-71.39036	-62.01014	-50.28831	-63.75286	3
-2282.949	-69.40267	-71.01651	-65.10756	-69.48082	-59.64774	-58.57895	-62.58078	4
-2318.622	-67.75401	-69.36785	-63.45886	-67.83216	-57.53808	-56.50286	-61.31777	5

جدول ۱۰: مقادیر $\hat{\beta}_{max}$, $\hat{\theta}_{max}$, k_{max} و حقبیمه خالص برآودگرهای مختلف

Table 10: Values of $\hat{\beta}_{max}$, $\hat{\theta}_{max}$, k_{max} and net premium of different estimators

k_{max}	$\hat{\beta}_{max}$	$\hat{\theta}_{max}$	\hat{p}
$k_{mm} = 5$	$\hat{\beta}_{mm} = 0.8712122$	$\hat{\theta}_{mm} = 0.1749633$	$\hat{p}_{mm} = 3.37657$
$k_{ml} = 3$	$\hat{\beta}_{ml} = 0.1195378$	$\hat{\theta}_{ml} = 0.4966554$	$\hat{p}_{ml} = 3.217375$
$k_{mix} = 5$	$\hat{\beta}_{mix} = 3.704073$	$\hat{\theta}_{mix} = 0.1749633$	$\hat{p}_{mix} = 4.619323$
$k_{ls} = 5$	$\hat{\beta}_{ls} = 1.000031$	$\hat{\theta}_{ls} = 0.4120259$	$\hat{p}_{ls} = 2.233271$
$k_{wls} = 2$	$\hat{\beta}_{wls} = 0.06839348$	$\hat{\theta}_{wls} = 0.3873936$	$\hat{p}_{wls} = 4.532246$
$k_p = 5$	$\hat{\beta}_p = 1.000023$	$\hat{\theta}_p = 0.4274079$	$\hat{p}_p = 2.152901$
$k_{cvm} = 5$	$\hat{\beta}_{cvm} = 1.0000255$	$\hat{\theta}_{cvm} = 0.4112187$	$\hat{p}_{cvm} = 2.237657$
$k_{ad} = 1$	$\hat{\beta}_{ad} = 2.793501$	$\hat{\theta}_{ad} = 6.32406$	$\hat{p}_{ad} = 0.1423892$



نمودار ۴: بافت‌نگار، نمودارهای جعبه‌ای، چندک_چندک وتابع توزیع تجربی داده‌های خسارت بیمه ماشین بیمه ایران

Fig. 4: Histogram, box plot, quantile-quantile and empirical distribution function of Iran Insurance car insurance claim data

مثال ۲. در یک شرکت بیمه یکی از خدمات، بیمه وسائل نقلیه است. موضوع خسارت واردہ به خودروهای در حال تردد در داخل شهرها را بر اثر تصادف در نظر بگیرید. اگر خودروها دارای بیمه باشند، وقتی تصادفی صورت می‌گیرد شرکت بیمه متعهد است که از طرف راننده مقصو مبلغی را به عنوان جبران خسارت پرداخت کند. می‌دانیم در صورتی که خسارت‌های واردہ کمتر از ۵۰۰,۰۰۰ ریال مقرر نبهرفه نیست که برای دریافت خسارت از شرکت بیمه اقدام صورت پذیرد. اما اگر در نظر بگیریم که تعدادی از خودروهایی که تصادف کرده‌اند گران قیمت‌اند و یا خسارت واردہ به آن‌ها شدید

می‌توان برآوردگر حق بیمه را به روش‌های مختلف به دست آورد که نتایج آن در [جدول ۱۰](#) آمده است.

در [جدول ۱۰](#) مقادیر ماکسیمم k برای هریک از روش‌های برآورده، به همراه برآورده پارامترهای β و θ متناظر با آن (تعداد داده‌های دورافتاده) و همچنین حق بیمه خالص ارائه شده است. به طور مثال، در روش گشتاوری تعداد داده‌های دورافتاده $k=5$ برآورده شده است، بنابراین بهازای $\hat{\beta}_{mm} = 0.8712122$ و $\hat{\theta}_{mm} = 0.1749633$ است و حق بیمه خالص متناظر با آن $\hat{p}_{mm} = 3.37657$ است.

جدول ۱۱: برآوردهای مختلف β برای $\alpha = 1.372$ نسبت به k

 Table 11: Various estimators of β for $\alpha = 1.372$ respect to k

$\hat{\beta}_{ad}$	$\hat{\beta}_{cvm}$	$\hat{\beta}_p$	$\hat{\beta}_{wls}$	$\hat{\beta}_{ls}$	$\hat{\beta}_{mix}$	$\hat{\beta}_{ml}$	$\hat{\beta}_{mm}$	k
5.000085	4.9999666	4.9999742	4.999959	4.999990	3.142297	18.353170	0.4316495	1
5.000085	0.1239608	1.5993283	1.780974	2.124528	3.099228	9.098362	1.1095494	2
5.000085	4.9984942	0.2618328	1.819728	2.150974	3.055664	8.250227	2.3236309	3
5.499902	4.9984942	1.6521680	5.000005	2.187310	3.008829	7.195901	5.1099639	4
5.499902	5.0000020	1.6891253	4.999372	5.000003	2.960044	7.813507	17.9738177	5

 جدول ۱۲: برآوردهای مختلف θ برای $\alpha = 1.372$ نسبت به k

 Table 12: Different estimators of θ for $\alpha = 1.372$ with respect to k

$\hat{\theta}_{ad}$	$\hat{\theta}_{cvm}$	$\hat{\theta}_p$	$\hat{\theta}_{wls}$	$\hat{\theta}_{ls}$	$\hat{\theta}_{mix}$	$\hat{\theta}_{ml}$	$\hat{\theta}_{mm}$	k
4.355500E-07	4.676806E-07	3.957359E-07	4.363649E-07	3.098155E-07	2.796704E-07	3.098155E-07	1	
5.291053E-07	4.771573E-07	4.052705E-07	4.327867E-07	3.007932E-07	5.062374E-07	3.007932E-07	2	
3.680291E-07	5.825220E-07	3.910359E-07	4.143691E-07	2.917207E-07	4.106268E-07	2.917207E-07	3	
3.345015E-07	4.507850E-07	2.941704E-07	3.958547E-07	2.825896E-07	4.777218E-07	2.825896E-07	4	
3.026454E-07	4.362148E-07	2.655536E-07	3.025644E-07	2.733899E-07	1.541216E-07	07	5	

جدول ۱۳:تابع درستنامایی تجربی نسبت به

 Table 13: Different estimators of θ for $\alpha = 1.372$ with respect to k

$l(\hat{\theta}_{ad}, \hat{\beta}_{ad})$	$l(\hat{\theta}_{cvm}, \hat{\beta}_{cvm})$	$l(\hat{\theta}_p, \hat{\beta}_p)$	$l(\hat{\theta}_{wls}, \hat{\beta}_{wls})$	$l(\hat{\theta}_{ls}, \hat{\beta}_{ls})$	$l(\hat{\theta}_{mix}, \hat{\beta}_{mix})$	$l(\hat{\theta}_{ml}, \hat{\beta}_{ml})$	$l(\hat{\theta}_{mm}, \hat{\beta}_{mm})$	k
-3369.084	-312.8188	-313.7861	-311.9326	-312.8407	-311.2676	-315.5855	-311.7098	1
-3566.087	-307.9107	-311.0299	-309.2609	-309.8204	-308.7950	-318.8814	-309.4394	2
-3766.795	-308.2520	-305.2523	-307.1960	-307.6209	-306.7795	-313.5469	-306.8922	3
-Inf	-306.4316	-307.1504	-305.8656	-305.7868	-305.1112	-316.8777	-305.8934	4
-Inf	-304.8807	-305.6489	-304.5234	-304.8793	-303.7345	-308.8130	-324.9688	5

 جدول ۱۴: مقادیر $\hat{\beta}_{max}$, $\hat{\theta}_{max}$, k_{max} و حقبیمه خالص برآوردهای مختلف

 Table 14: Values of $\hat{\beta}_{max}$, $\hat{\theta}_{max}$, k_{max} and net premium of different estimators

k_{max}	$\hat{\beta}_{max}$	$\hat{\theta}_{max}$	\hat{p}
$k_{mm} = 4$	$\hat{\beta}_{mm} = 5.109964$	$\hat{\theta}_{mm} = 2.825896E - 07$	$\hat{p}_{mm} = 2462050$
$k_{ml} = 5$	$\hat{\beta}_{ml} = 7.813507$	$\hat{\theta}_{ml} = 1.541216E - 07$	$\hat{p}_{ml} = 4639688$
$k_{mix} = 5$	$\hat{\beta}_{mix} = 2.960044$	$\hat{\theta}_{mix} = 2.733899E - 07$	$\hat{p}_{mix} = 2791065$
$k_{ls} = 5$	$\hat{\beta}_{ls} = 5.000003$	$\hat{\theta}_{ls} = 3.025644E - 07$	$\hat{p}_{ls} = 2417798$
$k_{wls} = 5$	$\hat{\beta}_{wls} = 4.999372$	$\hat{\theta}_{wls} = 2.655536E - 07$	$\hat{p}_{wls} = 2754793$
$k_p = 3$	$\hat{\beta}_p = 0.2618328$	$\hat{\theta}_p = 5.82522E - 07$	$\hat{p}_p = 2233599$
$k_{cvm} = 5$	$\hat{\beta}_{cvm} = 5.000002$	$\hat{\theta}_{cvm} = 3.026454E - 07$	$\hat{p}_{cvm} = 2417151$
$k_{ad} = 1$	$\hat{\beta}_{ad} = 5.000085$	$\hat{\theta}_{ad} = 1.376386E - 05$	$\hat{p}_{ad} = 63779.17$

برازش توزیع واپیول به داده‌های خسارت بیمه ایران می‌پردازم. نتایج مربوط به روش توصیفی در **نمودار ۴** آمده است. توزیع واپیول با پارامترهای $\hat{\theta} = 2.3327e+6$ و $\hat{\alpha} = 1.372$ که به روش ماکسیمم درستنامایی به دست آمده است، داده‌های خسارت به خوبی برآش می‌یابد ($p = 0.375$). علاوه بر پارامترهای β و θ ، تعداد داده‌های دورافتاده (k)، نیز مجهول است. لذا بهای $k = 1, 2, \dots, 5$ برآوردهای پارامترهای β و θ به روش‌های گوناگون به دست آید و همانند مثال قبل، ابتدا تعداد داده‌های دورافتاده تعیین می‌شود. برآوردهای پارامترها به روش‌های مختلف در **جدوا ۱۱** و **۱۲** بهای k های مختلف گزارش شده است. **جدول ۱۳** مقدار تابع درستنامایی تجربی بهای k های است (طبیعی است که تعداد این خودروها نسبت به عمدۀ خودروها کمتر است) باید حقبیمه را طوری در نظر گرفت که بیمه‌گر دچار خسارت و در نهایت ورشکستگی نشود. در اینجا، تعداد داده‌های دورافتاده k نیز مجهول است. در این مقاله یک نمونه به اندازه ۲۰ از داده‌های خسارت ماشین بیمه ایران در سال ۲۰۰۹ میلادی را در نظر گرفته‌ایم که به شرح ذیل آند.

است (طبیعی است که تعداد این خودروها نسبت به عمدۀ خودروها کمتر است) باید حقبیمه را طوری در نظر گرفت که بیمه‌گر دچار خسارت و در نهایت ورشکستگی نشود. در اینجا، تعداد داده‌های دورافتاده k نیز مجهول است. در این مقاله یک نمونه به اندازه ۲۰ از داده‌های خسارت ماشین بیمه ایران در سال ۲۰۰۹ میلادی را در نظر گرفته‌ایم که به شرح ذیل آند.

۷۵....., ۷۸....., ۶۳....., ۱۷۵....., ۱۴۵....., ۳....., ۸۶۵....., ۴۲۱....., ۸۹....., ۹۵....., ۱۲۴....., ۱۸....., ۱۶۳....., ۹۰۱....., ۴۷۵....., ۳۲۵....., ۱۱۳۵....., ۱۳۲۶....., ۱۲۸....., ۷۶..... همانند مثال قبل به روش توصیفی و استنباطی به بررسی

تشکر و قدردانی

نویسنده‌گان مقاله از زحمات داوران و سردبیر محترم، که با ارائه نکات موثر و مفید موجب ارتقا علمی و کیفی مقاله شده اند کمال تشکر و قدردانی را دارند و همچنین از دانشگاه فردوسی مشهد که با قرار دادن امکانات مادی و معنوی نقش اساسی در توسعه این مقاله داشته اند نیز سپاسگزاری می‌کنند.

مختلف را نشان می‌دهد. در انتها، همانند قبل می‌توان حق‌بیمه را به روش‌های مختلف برآورد کرد. نتایج آن در **جدول ۱۴** آمده است. در **جدول ۱۴** مقادیر ماکسیمم k برای هر یک از روش‌های برآورده، به همراه برآورده پارامترهای β و θ متناظر با آن و همچنین حق‌بیمه خالص ارائه شده است.

نتایج و بحث

تعارض منافع

نویسنده‌گان اعلام می‌دارند که در مورد انتشار این مقاله تضاد منافع وجود ندارد. علاوه بر این، موضوعات اخلاقی شامل سرقت ادبی، رضایت آگاهانه، سورفتار، جعل داده‌ها، انتشار و ارسال مجدد و مکرر توسط نویسنده‌گان رعایت شده است.

دسترسی آزاد

کپیرایت نویسنده‌ها (ها) ©2024: این مقاله تحت مجوز بین‌المللی Creative Commons Attribution 4.0 اجازه استفاده، اشتراک‌گذاری، اقتباس، توزیع و تکثیر را در هر رسانه یا قالبی مشروط بر درج نحوه دقیق دسترسی به مجوز CC، منوط به ذکر تغییرات احتمالی بر روی مقاله می‌داند. لذا به استناد مجوز مذکور، درج هرگونه تغییرات در تصاویر، منابع و ارجاعات یا سایر مطالب از اشخاص ثالث در این مقاله باید در این مجوز گنجانده شود، مگر اینکه در راستای اعتبار مقاله به اشکال دیگری مشخص شده باشد. در صورت عدم درج مطالب مذکور و یا استفاده فراتر از مجوز فوق، نویسنده ملزم به دریافت مجوز حق نسخه‌برداری از شخص ثالث است.

به منظور مشاهده مجوز بین‌المللی Creative Commons Attribution 4.0 به نشانی زیر مراجعه شود:

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>

داداشت ناشر

ناشر نشریه پژوهشنامه بیمه با توجه به مرزهای حقوقی در نقشه‌های منتشرشده بی‌طرف باقی می‌ماند.

برآورده حق‌بیمه خالص یکی از مهم‌ترین مسائل در بیمه است با توجه به اینکه می‌توان برای توزیع‌های مختلف حق‌بیمه را محاسبه کرد، هدف اصلی این پژوهش محاسبه حق‌بیمه و برآورده پارامترهای توزیع واپیول با استفاده از روش‌های مختلف است. با توجه به وجود داده دورافتاده، لازم است که توزیع واپیول را در مواجهه با داده‌های دورافتاده برازش دهیم، در اینجا، ابتدا پارامترهای توزیع واپیول به روش‌های گوناگون برآورده و کارآبی آن‌ها با یکدیگر مقایسه شد که به طور کلی برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی و آمیخته گشتاوری و ماکسیمم درست‌نمایی برای حجم نمونه کم به‌ازای پارامترهای مختلف کارتر بودند و برای حجم نمونه بزرگ برآوردهای کمترین توان‌های دوم خطأ عملکرد بهتری در مقایسه با سایر برآوردها دارد، زیرا میانگین توان دوم خطای کمتری نسبت به سایر برآوردها دارد و به‌ازای پارامترهای مختلف کارتر بود. لذا بر این اساس، حق‌بیمه خالص برآورده و گزارش شد. برای بررسی وضعیت این برآوردها در مسائل واقعی دو مثال از داده‌های بیمه خسارت آتش‌سوزی دانمارک و بیمه خودروی شرکت بیمه ایران انتخاب و ضمن برآوردهای توزیع واپیول در مواجهه با داده‌های دورافتاده، حق‌بیمه خالص برآورده شد.

مشارکت نویسنده‌گان

ابراهیم سهرابی: جمع‌آوری مطالعات مرتبط، جمع‌آوری و اخذ داده‌ها، تجزیه و تحلیل و تفسیر داده‌ها، تحلیل آماری، مهدی جباری نوقابی: ایده و مطالب نظری، تجزیه و تحلیل و تفسیر داده‌ها، تجزیه و تحلیل و تفسیر داده‌ها، تحلیل آماری و نظارت و سرپرستی.

منابع

Abubakar, H.; Muhammad Sabri, S.R., (2021). A simulation study on modified Weibull distribution for modelling of investment return. *J. Sci. Technol.*, 29(4): 2767-2790 **(24 Pages)**.

Alyami, S.A.; Elbatal, I.; Alotaibi, N.; Almetwally, E.M.; Okasha, H.M.; Elgarhy, M., (2022). Topp-Leone modified Weibull model: Theory and applications to medical and engineering data. *J. Appl. Sci.*, 12(20).

Anderson, T.W.; Darling, D.A., (1954). A test of goodness-of-fit. *J. Am. Stat. Assoc.*, 49(268): 765-769 **(5 Pages)**.

Anscombe, F.J., (1960). Rejection of outliers. *J. Technometrics.*, 2(2): 123-147 **(25 Pages)**.

Barnett, V.; Lewis, T., (1984). Outliers in statistical data. *J. Biom.*, 30(7): 866-867 **(2 Pages)**.

Chaturvedi, A.; Pati, M.; Tomer, S.K., (2014). Robust bayesian analysis of Weibull failure model. *J. Metron.*, 72: 77-95 **(19 Pages)**.

Dixit, U.J., (1987). Characterization of the Gamma distribution in the presence of K outliers., 4: 54-59 **(6 Pages)**.

Dixit, U.J., (1989). Estimation of parameters of the Gamma distribution in the presence of outliers., 18(8): 3071-3085 **(15 Pages)**.

Dixit, U.J.; Jabbari Nooghabi, M., (2011). Efficient estimation of the parameters of the Pareto distribution in the presence of outliers. *J. Commun. Stat. Appl. Methods.*, 18(6): 817-835 **(19 Pages)**.

Fang, L.; Barmalzan, G.; Ling, J., (2016). Dispersive order of lifetimes of series systems in multiple-outlier Weibull models. *J. Syst. Sci. Complexity.*, 29(6): 1693-1702 **(10 Pages)**.

Gupta, P.K.; Singh, A.K., (2017). Classical and bayesian estimation of Weibull distribution in the presence of outliers., 4(1): 1-9 **(9 Pages)**.

Hawkins, D.M., (1980). Identification of outliers.

Johnson, N.L.; Kotz, S.; Balakrishnan, N., (1995). Continuous univariate distribution., 2.

Kale, B.K.; Sinha, S.K., (1971). Estimation of expected life in the presence of an outlier observation. *J. Technometrics.*, 13(4): 755-759 **(5 Pages)**.

Kao, J.H.K., (1958). Computer methods for estimating Weibull parameters in reliability studies., 13: 15-22 **(8 Pages)**.

Kao, J.H.K., (1959). A graphical estimation of mixed Weibull parameters in life testing electron tube. *J. Technometrics.*, 1(4): 389-407 **(19 Pages)**.

Kendal, M.G.; Buckland, W.R., (1957). A dictionary of statistical terms.

Lieblein, J.; Zelen, M., (1956). Statistical investigation of the fatigue life of deep groove ball bearings. *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 57(5): 273-316 **(44 Pages)**.

Liu, X.; Ahmad, Z.; Gemeay, A.M.; Abdulrahman, A.T.; Hafez, E.H.; Khalil, N., (2021). Modeling the survival times of the COVID-19 patients with anew statistical model: A case study from China., 16(7).

Pettit, L.I., (1988). Bayes methods for outliers in exponential samples. *J. R. Stat. Soc.*, 50(3): 371-380 **(10 Pages)**.

Pettitt, A.N., (1976). A two-sample Anderson-Darling rank statistic. *J. Biom.*, 63(1): 161-168 **(8 Pages)**.

Read, R.R., (1981). Representation of certain covariance matrices with application to asymptotic efficiency. *J. Am. Stat. Assoc.*, 76(373): 148-154 **(7 Pages)**.

Sindhu, T.N.; Atangana, A., (2021). Reliability analysis incorporating exponentiated inverse Weibull distribution and inverse power law. *J. Qual. Reliab. Eng. Int.*, 37(6): 2399-2422 **(24 Pages)**.

Singh, B.; Rathi, S.; Kumar, S., (2013). Inferential statistics on the dynamic system model with time-dependent failure-rate. *J. Stat. Comput. Simul.*, 83(1): 1-24 **(24 Pages)**.

Stephens, M.A., (1974). EDF statistics for goodness of fit and some comparisons. *J. Am. Stat. Assoc.*, 69(347): 730-737 **(8 Pages)**.

Strzelecki, P., (2021). Determination of fatigue life for low probability of failure for different stress levels using 3-parameter Weibull distribution. *J. Fatigue.*, 145.

Weibull, W., (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *J. Appl. Mech.*

Young, V.R., (2006). Premium principles in encyclopedia of actuarial science.

معرفی نویسندها

AUTHOR(S) BIOSKETCHES

ابراهیم سهرابی، دانشجوی دکتری آمار، گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

- Email: sohrabi.ebrahim@mail.um.ac.ir
- ORCID: 0009-0000-9737-0021
- Homepage: <https://statistics.um.ac.ir/index.php/fa/>

مهدی جباری نوqابی، دانشیار گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

- Email: jabbarim@um.ac.ir
- ORCID: 0000-0002-5636-2209
- Homepage: <https://mathstat.um.ac.ir/index.php/fa/>

HOW TO CITE THIS ARTICLE

Sohrabi, E.; Jabbari Nooghab, M., (2024). Estimation of the parameters of Weibull distribution and net premium in the presence of outliers. *Iran. J. Insur. Res.*, 13(1): 43-60.

DOI: [10.22056/ijir.2024.01.04](https://doi.org/10.22056/ijir.2024.01.04)

URL: https://ijir.irc.ac.ir/article_160310.html?lang=en

